5時から **lecture** （その3）

球面天文学
(part 2)

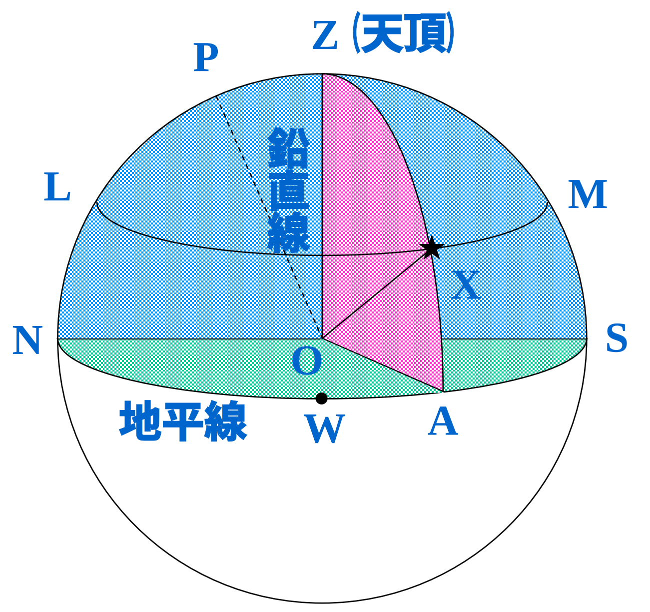
株式会社　五藤光学研究所
児玉光義

天球座標

- 地球表面上の任意の位置は、互いに直交する2個の大円、つまり、グリニジ子午線と赤道を基準にして、経度と緯度という1組の球面座標によって完全に規定されています。
- 天球上の星の位置を規定する原理もまったく同じですが、座標軸の採り方、つまり、基準となる2個の大円の選び方によって、いくつかの方法があります。
- ここでは、現在、普通に使われている座標系と、各座標系の相互変換方法について説明します。

地平座標系

- 図1において、点 O を地球上の観測者の位置とし、球 NZS を O を中心とする天球とします。
- 点 Z は、観測者を通る鉛直線を上方に延長して天球と交わった点ですから天頂です。
- また、点 O を通り鉛直線 OZ に垂直な平面が天球と交わってできる大円NWAS は地平線です。
- この地平線によって天球は上下に分けられ、上半球は観測者から見えますが、下半球は見ることができません。



[図1]

- いま、点 X を、ある時刻における天体の天球上の位置とします。
- 天頂と天底を通る大円を垂直圏といいますが、大円 ZXA も一つの垂直圏です。
- この垂直圏に沿って測った角 AOX 、あるいは大円の弧 AX のことを、天体 X の『高度』といいます。
- 天頂は、地平線の極ですから、大円の弧 ZA は 90 ° です。
  従って、天体の高度を h とすると、弧 ZX = 90 ° - h です。
- この弧 ZX 、つまり天頂から垂直圏に沿って天体まで測った角距離のことを『天頂距離』といいます。
- 天体 X の天頂距離 (弧 ZX) を z とすれば、

$$z = 90° - h$$

です。

- 天体 X を通り、地平線 NWAS に平行な小円 LXM を引けば、この小円上の任意の点は、天体 X と同じ高度、または同じ天頂距離になります。そこで、この小円のことを『等高度圏』といいます。

- 天体の高度、または天頂距離が与えられれば、その天体のある等高度圏は一義的に決まります。

- しかし、天球上における天体の位置を完全に規定するには、天体がこの等高度圏上のどこにあるか知らなければなりません。

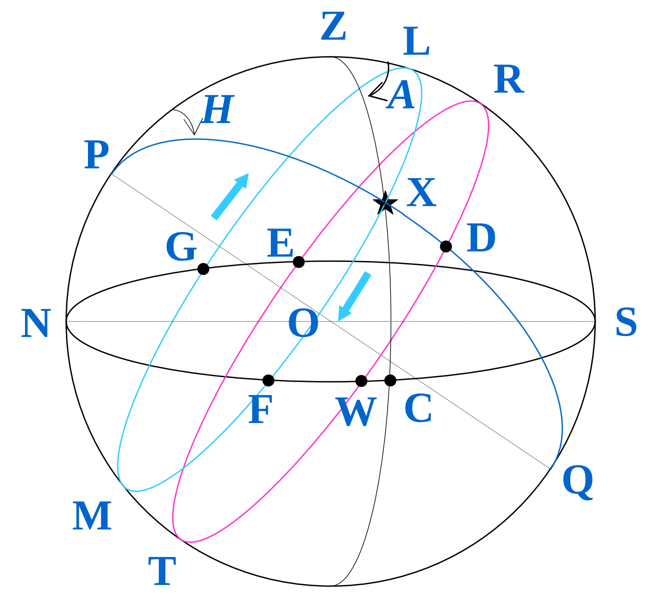
- 点 O から観測者の眼を通り、地軸に平行な直線を引き、天球と交わった点を P とすれば、この点 P は『天の北極』です。また、OP を逆に延長して天球と交わった点が『天の南極』です。

- この天の両極を通る特別な垂直圏が『天の子午線』です。図1の NPZS が子午線で、地球の子午線の延長が天球と交わった大円です。

- 天の子午線と地平線は、南北２点で交わりますが、南の交点を『南点』、北の交点を『北点』といいます。
- また、子午線と直交する垂直圏（卯酉線）もまた地平線と２点で交わりますが、東の交点を『東点』、西の交点を『西点』といいます。
- 従って、地平線と子午線を基準にして、天球上の星の位置を完全に規定することができます。
- つまり、天体 X の位置を表すのに、図１の角距離 AX と SA を用いるのです。角距離 AX は、先の述べたように天体の高度で、角距離 SA は、天体 X の『方位角』と呼ばれるものです。
- 方位角は、普通記号 A で表し、南点を基点として西周りに 360°まで測ります。
- このように、天体の位置を方位角と高度で表す座標系のことを『地平座標系』といいます。

赤緯時角座標系

- 図2において、Z を緯度φの地点にいる観測者 O の天頂とし、大円 NWS を地平線、P と Q を天の北極と南極とします。
- O を通り PQに垂直な平面が天球と交わってできる大円は天の赤道です。
- 天の赤道と地平線は E と W の2点で交わります。
- 天頂 Z は地平線の極で、天の北極 P は赤道の極ですから、W は天頂と天の北極からそれぞれ 90゜離れている



［図2］

ので、子午線からも 90°離れていることが分かります。

- いま、天体を X とすれば、この天体は地球の自転によって、天の赤道に平行な小円 GLFM を描きながら、東の地平線上の G から出て、矢印の方向に移動し、西の地平線上の F に沈みます。

- いま、天体 X と天の両極 P, Q を通る大円の弧 PXQ を考えると、この大円を天体 X の『時圏』といいます。そして、この時圏に沿って天の赤道から天体までの角距離 DX を天体 X の『赤緯』といいます。

- 一般に、赤緯は記号δで表しますが、DX = δ、PX = 90° − δで、この PX のことを『北極距離』といいます。

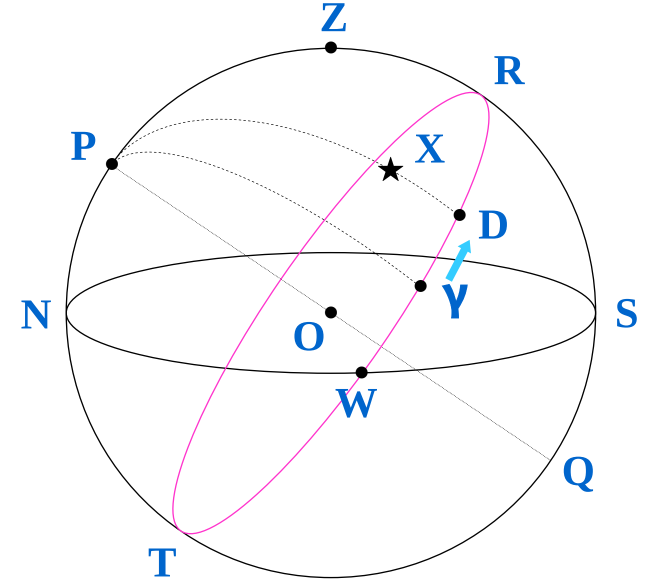
- また、図2の小円 GLXFM は、赤緯が等しい点の軌跡で『等赤緯圏』といいます。

- 天体の赤緯が分かれば、その天体のある等赤緯圏は一義的に決まります。しかし、天球上の天体の位置を完全に規定するには、その天体が等赤緯圏のどこにあるか知らなければなりません。
- 言い換えれば、その天体を含む時圏の位置が示されなければなりません。
- 大円 PZSQ は、天の両極と天頂を通る垂直圏ですから、天の子午線ですが、これはまた、時圏の特別なものです。
- この子午線は、観測者に固有のものですが、決まった地点の観測者に対しては、天球上で位置の変わらない大円ですから、これを基準にして時圏 PXQ の位置を決めます。
- 子午線と天の赤道の交点 R を起点にして、赤道に沿って測った角距離 RD あるいは角 ROD によって時圏 PXQ の位置を決めれば良いわけです。

- P は赤道の極ですから、この RD、または∠ROD は球面角 RPD に等しく、この RPD によって天体 X を通る時圏の位置を規定することができます。
- この球面角 RPD を天体 X の『時角』といい、普通、記号 H で表します。
- 因みに、時角は観測者が北半球にいる場合は、子午線を起点として西周りに 0 時から 24 時まで測ります。
- また、赤緯は、赤道から北の方向に 0°から ＋90°まで測り、南の方向に 0°から －90°まで測ります。
- 因みに、天体の位置を時角と赤緯で表す座標系のことを『赤緯時角座標系』といいます。

赤道座標系

- 赤緯δは、地球上の観測者の位置に関係なく、地球の日周運動よってても変わらない量です。
- しかし、時角は、観測地の緯度に関係しないだけで、日周運動によって時々刻々変化します。
- これでは不便なので、地上のように、天球上の天体の位置も、天の赤道と、赤道上の固定点を基準にして規定します。
- 図3において、PQ を天の北極と南極、TWR を天の赤道、γを赤道上の固



[図3]

定点、X を任意の天体とし、天体 X を通る時圏 PXD が赤道と交わる点を D とすれば、γD と DX は観測者の位置や日周運動に関係なく、各天体に固有で、しかも時とともに変わらない量ですから、天体の位置を規定する座標としては好都合です。

- また、固定点γは、理屈上は赤道上のどこにとっても良いのですが、天文学では春分点にとることにしています。

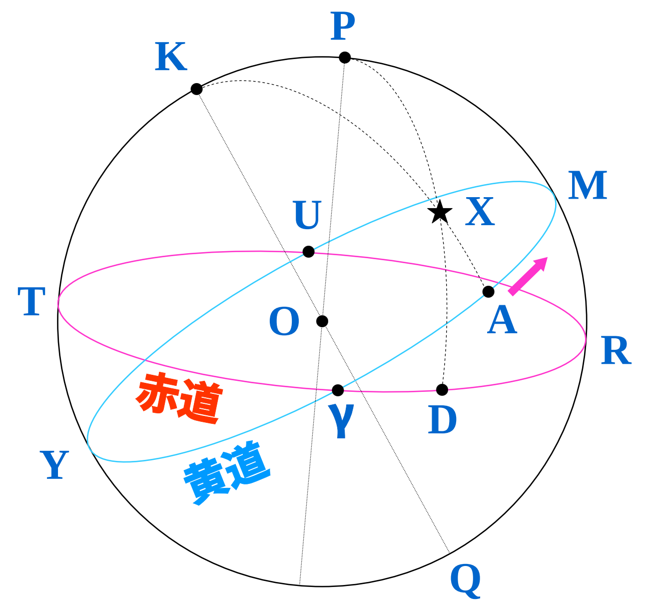
- 角距離 DX は先に述べた赤緯で、角距離γD を天体 X の『赤経』といいます。もちろん図3のγは春分点です。

- 因みに、赤経は記号αで表し、春分点を 0 時として、天球の北側から見て反時計回りに 24 時まで測ります。

- このように、天体の位置を赤経と赤緯で表す座標系のことを『赤道座標系』といいます。

黄道座標系

- 天球上の天体の位置を、赤道と春分点に準拠して表したように、黄道と春分点に準拠して表すこともできます。
- 図4において、X を任意の天体とし、黄道の極 K と天体 X を通る大円の弧 KXA が黄道と交わる点を A とすれば角距離γA と AX によって天体 X の位置を一義的に表すことができます。
- このγA と AX を、それぞれ天体 X の黄経、黄緯といいます。
- 黄経は記号λで表し、黄道に沿って東回りに 0 °から 360 °まで測ります。



［図4］

- 黄緯は、記号βで表し、黄道から北向きに0°から+90°までと、南向きに0°から－90°まで測ります。
- 因みに、天体の位置を黄経と黄緯で表す座標系のことを『黄道座標系』といいます。

球面三角形の基本公式

正弦法則

定理2

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

余弦法則

定理3

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

余弦法則

定理4

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

地平座標と赤緯時角座標の相互変換

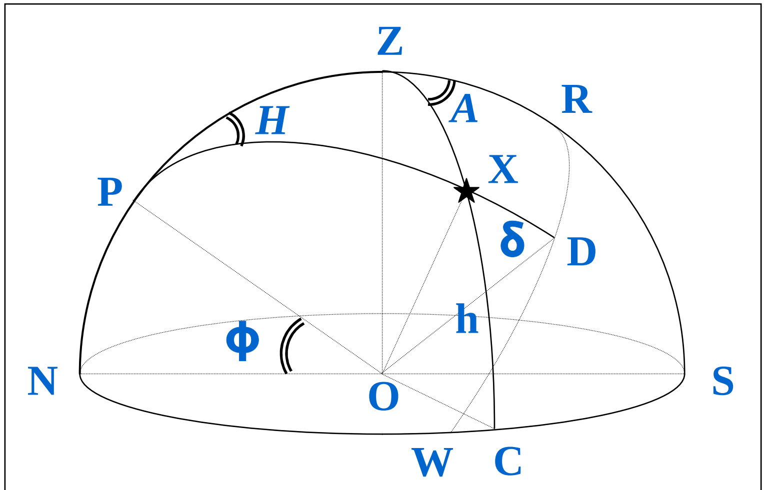
計算の便利のために、あらかじめ必要な公式を導いておきます。

正弦法則の定理2より	$\sin a \sin B = \sin b \sin A$	公式 (A)
余弦法則の定理4より	$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$	
余弦法則の定理3より	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$	

図5において、NWS を地平線、WDR を天の赤道、P を天の北極、Z を天頂、X を天体の天球上の位置とすると、

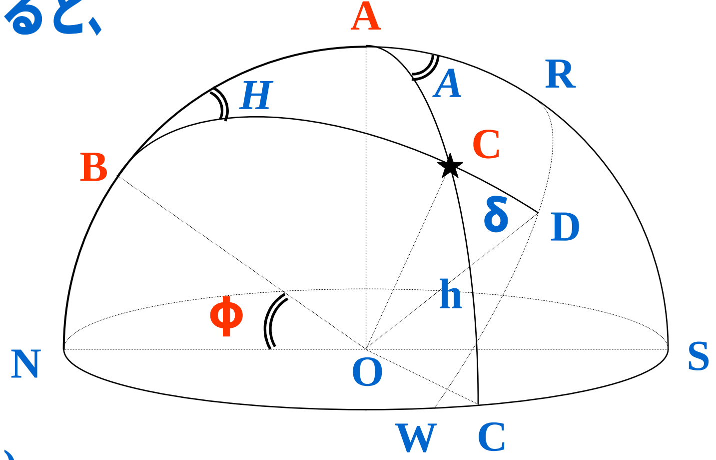
- ∠SZX = A が天体 X の方位角
- ∠COX = 弧CX = h が天体 X の高度
- ∠ZPX = H が天体 X の時角
- ∠DOX = 弧DX = δ が天体 X の赤緯

です。



［図5］

そこで、図5の天頂 Z 、天の北極 P 、天体 X の各点を A, B, C で表し、観測地の緯度（∠NOP = 弧 NP）をϕとすると、



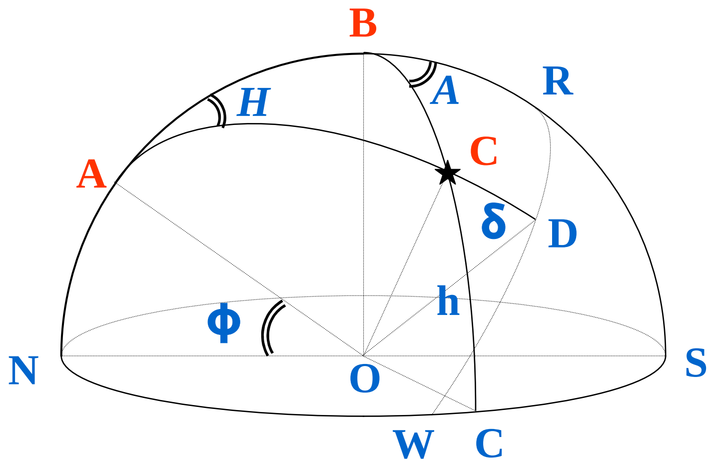
辺 a = 弧 BC = 90°− δ
辺 b = 弧 AC = 90°− h
辺 c = 弧 AB = 90°− ϕ
また、∠A = ∠BAC = 180°− A

これを公式 (A) に代入すると、

$$\sin(90^\circ - \delta)\sin H = \sin(90^\circ - h)\sin(180^\circ - A)$$
$$\sin(90^\circ - \delta)\cos H = \cos(90^\circ - h)\sin(90^\circ - \phi) - \sin(90^\circ - h)\cos(90^\circ - \phi)\cos(180^\circ - A)$$
$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - h)\cos(90^\circ - \phi) + \sin(90^\circ - h)\sin(90^\circ - \phi)\cos(180^\circ - A)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\sin H &= \cos h\cos A \\ \cos\delta\cos H &= \sin h\cos\phi + \cos h\sin\phi\cos A \\ \sin\delta &= \sin h\sin\phi - \cos h\cos\phi\cos A \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

となります。



また、図5の P, Z, X を A, B , C で表せば、

辺 a = 弧 BC = 90°– h
辺 b = 弧 AC = 90°– δ
辺 c = 弧 AB = 90°– φ
∠B = ∠ABC = 180°– A

これを公式 (A) に代入すると、

$$\sin(90^\circ-h)\sin(180^\circ-A) = \sin(90^\circ-\delta)\sin H$$
$$\sin(90^\circ-h)\cos(180^\circ-A) = \cos(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ-\phi) - \sin(90^\circ-\delta)\cos(90^\circ-\phi)\cos H$$
$$\cos(90^\circ-h) = \cos(90^\circ-\delta)\cos(90^\circ-\phi) + \sin(90^\circ-\delta)\sin(90^\circ-\phi)\cos H$$

$$\cos h \sin A = \cos\delta \sin H$$
$$-\cos h \cos A = \sin\delta\cos\phi - \cos\delta\sin\phi\cos H$$
$$\sin h = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos H$$

$$\left.\begin{aligned} \cos h \sin A &= \cos\delta\sin H \\ \cos h\cos A &= -\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos H \\ \sin h &= \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos H \end{aligned}\right) \quad (2)$$

(1) 式と (2) 式によって、地平座標と赤緯時角座標の相互変換ができます。

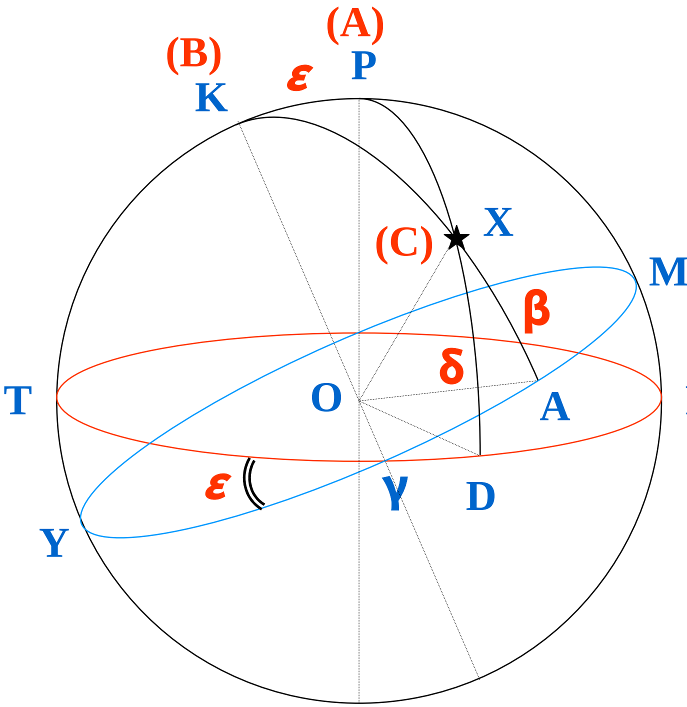
赤道座標と黄道座標の相互変換

図6において、TγDR を天の赤道、YγAM を黄道、P を天の北極、K を黄道の極、X を天体の天球上の位置とすると、

∠γOD = 弧γD = αが X の赤経
∠DOX = 弧DX = δが X の赤緯
∠γOA = 弧γA = λが X の黄経
∠AOX = 弧AX = βが X の黄緯

です。

そこで、図6の 天の北極 P、黄道の極 K、天体 X の各点を A, B, C で表し、黄道の傾斜角をεとすれば、



［図6］

辺 a = 弧 BC $= 90° - \beta$
辺 b = 弧 AC $= 90° - \delta$
辺 c = 弧 AB $= \varepsilon$
$\angle A = \angle BAC = 90° + \alpha$
$\angle B = \angle ABC = 90° - \lambda$

これを公式 (A) に代入すると、

$$\sin(90° - \beta)\sin(90° - \lambda) = \sin(90° - \delta)\sin(90° + \alpha)$$
$$\sin(90° - \beta)\cos(90° - \lambda) = \cos(90° - \delta)\sin\varepsilon - \sin(90° - \delta)\cos\varepsilon\cos(90° + \alpha)$$
$$\cos(90° - \beta) = \cos(90° - \delta)\cos\varepsilon + \sin(90° - \delta)\sin\varepsilon\cos(90° + \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon \\ \sin\beta &= \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

となります。

また、図6の K, P, X を A, B , C で表せば、

辺 a = 弧 BC = $90° - \delta$
辺 b = 弧 AC = $90° - \beta$
辺 c = 弧 AB = $90° - \varepsilon$
$\angle A = \angle BAC = 90° - \lambda$
$\angle B = \angle ABC = 90° + \alpha$

これを公式 (A) に代入すると、

$$\sin(90° - \delta)\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \beta)\sin(90° - \lambda)$$
$$\sin(90° - \delta)\cos(90° + \alpha) = \cos(90° - \beta)\sin\varepsilon - \sin(90° - \beta)\cos\varepsilon\cos(90° - \lambda)$$
$$\cos(90° - \delta) = \cos(90° - \beta)\cos\varepsilon + \sin(90° - \beta)\sin\varepsilon\cos(90° - \lambda)$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda$$
$$-\cos\delta\sin\alpha = \sin\beta\sin\varepsilon - \cos\beta\cos\varepsilon\sin\lambda$$
$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\sin\alpha &= -\sin\beta\sin\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon \\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon\end{aligned}\right) \quad (4)$$

(3) 式と (4) 式によって、赤道座標と黄道座標の相互変換ができます。

地平座標と赤道座標の相互変換

天体の時角というのは、天体が観測地の子午線上にあったときから、実際に観測するまでの間の時間です。いま、天体の代わりに春分点で考えると、春分点が子午線上にあるときがその地方の恒星時のはじまりで、地方恒星時の 0 時ですから、春分点の時角は、観測地の子午線の地方恒星時を与えることになります。従って、地方恒星時を θ とすると、

$$H = \theta - \alpha$$

となります。そこで、この関係を (1) 式に代入すると、

$$\left.\begin{aligned}
\cos\delta\sin(\theta-\alpha) &= \cos h\cos A\\
\cos\delta\cos(\theta-\alpha) &= \sin h\cos\phi + \cos h\sin\phi\cos A\\
\sin\delta &= \sin h\sin\phi - \cos h\cos\phi\cos A
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

となります。

また、(2) 式に代入すると、

$$\left.\begin{array}{l}\cos h \sin A = \cos\delta \sin(\theta-\alpha) \\ \cos h \cos A = -\sin\delta\cos\phi + \cos\delta\sin\phi\cos(\theta-\alpha) \\ \sin h = \sin\delta\sin\phi + \cos\delta\cos\phi\cos(\theta-\alpha)\end{array}\right\} \quad (6)$$

となります。従って、(5) 式と (6) 式によって、地平座標と赤道座標の相互変換ができます。地方恒星時については、後日くわしく説明いたします。

実際の座標変換の計算方法を、(1) 式の場合を例に説明します。
いま、(1) 式の第一、第二、第三式の値をそれぞれ L, M, N とすれば、

$\tan H = \dfrac{L}{M}$ 　とし、arctangent で *H* の値を求めます。

ここで求めた *H* の値を第一式または第二式に代入して cos δ の値を求め、
その値を K とすれば、

$\tan \delta = \dfrac{N}{K}$ 　とし、arctangent で h の値を求めます。

また、象限の判定は、

① cos の値＞0、sin の値＞0 ⇒ arctangent の値そのまま
② cos の値＞0、sin の値＜0 ⇒ arctangent の値＋180°
③ cos の値＜0 ⇒ arctangent の値＋90°

とします。