

# 日影の科学 1

平成 16 年 10 月 5 日

## 1 序

太陽の光が建物や木々に遮られて出来る影（日影）は日常的に馴染み深い現象である。また逆に屋内や洞窟内の奥深くには太陽光線が届かないが、洞窟の入り口近くや家の窓側には太陽の日が差し込んでくることも良く知られている。

建物や木々が作る影の形と屋内に差し込む日差しはいつも同じではなく、冬と夏ではその形は異なり、また朝方と夕方でもそれは変化する。日影の形とその変化の様子を観測し、そこから得られる太陽と地球の興味深い関係を探ってみよう。これを日影の科学と呼ぶことにする。

## 2 影の向きと長さ

日影と日差しは逆の関係であるから、どちらか片方について調べればよい。ここでは日影に注目することにしよう。太陽の光をさえぎるものが建物の場合と木々の場合では、それらがつくる日影の形もそれぞれ違ってくるが、日影の科学で重要となるのは影の方向と長さである。そこで以下では議論の簡単化のために、1本の棒が作る影の方向とその長さについて考えてみたい。

### 2.1 棒が作る影の方向について

棒から影の先端に向かう方向を影の方向と呼ぶことにする。影の方向は、あらかじめ基準の方向を決めて、その方向から時計針の進む向きを正にとる角度で表すことができる。基準の方向としては北の方向をとることにする。このようにして表された影の方向を  $a$  とする。太陽の光線は影の向きとは逆方向から差してくるので、太陽の方向は棒から影と逆向きの方向にあることになる。影の方向が与える角度  $a$  を太陽の方位角と呼ぶ。すなわち、 $a$  は南の方向を基準にして、そこから時計針の進む方向を正とした太陽までの方位角を表す。

一日のうちでも影の方向は時間の経過によって変化することから、太陽の方位角も時間と共に変わることがわかる。一日のうちで太陽の方位角が変化する現象は、太陽の日周運動と呼ばれている<sup>1</sup>。太陽の方位角がゼロとなるときを（太陽が真南にあるとき）、太陽

<sup>1</sup>日周運動は地球の自転によって起きるものであり、太陽が東の方向から西の方向に移動していくことが

の南中時（または正中時）という。太陽が南中したとき、影は真北の方向を指す。

## 2.2 影の長さについて

棒の位置から影の先端までの距離を影の長さという。影の先端と棒の先端を結ぶ直線が地面となす角は、地表からの太陽の高度を表す。これを  $h$  で表すことにして、 $h$  を太陽の高度角と呼ぶ。棒と影および影の先端と棒の先端を結ぶ線分は直角三角形をなすことから、棒の長さを  $\ell$  としたとき影の長さ  $L$  は、高度角  $h$  の関数として

$$L = \ell \cot h \quad (1)$$

で与えられる。

(1) からわかるように、太陽の高度角は影の長さ  $L$  と棒の長さ  $\ell$  の比から求めることができる。また逆に太陽の高度角がわかっている時、影の長さ  $L$  を測定すれば、その影を作る棒の長さ  $\ell$  は

$$\ell = L \tan h \quad (2)$$

で与えられる。高層ビルや鉄塔の高さを直接測定することが不可能な場合でも、その影の長さを測定できる場合には、(2) の関係を用いてそれらの高さを求めることが出来る。この問題は、高層ビルを建築するにあたってその影の影響が近隣に及ぼす影響（日照権の問題）を考慮する際に、敷地の広さ（許される影の長さ  $L$ ）から建築可能なビルの高さ  $\ell$  を決めるための基本的な関係を与えている<sup>2</sup>。

朝夕と正午では自分の影の長さが違うことに気が付くであろう。人を棒に例えれば、自分の身長（棒の長さ  $\ell$ ）が同じでもその影の長さが変化するのは、太陽の高度が朝夕と正午では異なるからである。また同じ木の影の長さが季節によって変わることもよく知られた現象である<sup>3</sup>。これらのことから、同じ日でもその時刻によって、太陽の高度（高度角  $h$ ）が変化することがわかる。また季節の移り変わりによっても、太陽の高度（高度角  $h$ ）は変化する。

## 2.3 方位角と高度角（地平座標）

影の方向から太陽の方位角  $a$  が、また影の長さ  $L$  と棒の長さ  $\ell$  の比から太陽の高度角  $h$  が求められた。方位角  $a$  と高度角  $h$  がわかれば、太陽を観測するために必要な太陽の位置に関する情報が与えられる。すなわち、地上のある場所で望遠鏡を用いて太陽を見るためには、望遠鏡をどの方向に向け（方位角）、地上からどれだけ上向き（高度角）に設置すれば良いかがわかることになる。この意味で、2つの角度 ( $a, h$ ) は、観測するにあたって必要な太陽の位置に関する情報を与えるものであり、これを太陽の地平座標と呼ぶ<sup>4</sup>。

ら、地球は西から東の方向に自転していることがわかる。また日周運動が地球自転によってもたらされることから、これは太陽に固有な現象ではなく、全ての天体に共通な運動である。

<sup>2</sup>太陽の高度角は季節によって変化することから、影の長さが最も長くなる季節を選んで、ビルの高さを決めることが必要となる。

<sup>3</sup>屋内に差し込む日差しが、夏は窓際だけであったものが冬には室内の奥深くまで到達するのは、夏季と冬季では太陽の高さが異なるためである。

<sup>4</sup>同様に、任意の天体の地平座標を考えることが可能である。すなわち、観測地におけるある天体の方位角と高度角がわかれば、目的の天体を観測するために望遠鏡をどこに向ければよいかがわかる。

日本が昼の時でも地球の反対側では夜であることから、同じときでも観測地の経度の違いにより太陽の高度と方位が異なることがわかる。また、地球の北極に近いところでは夏季には一日中太陽が沈まないことがある。これは観測地の緯度が異なれば、同じ日の同じ時刻においても、各観測地での太陽高度が違うことを示している。これらのことから、天体が同じでも観測地が異なれば、その天体の方位角と高度角は違ってくることになる。このことから決められた時刻における各天体の地平座標は、観測地ごとに異なる値を持つことがわかる。

各観測地における天体の地平座標は、その場所で目的の天体を観測する場合に向けるべき望遠鏡の向きと高さを直接示しているという意味で便利な座標であるが、一方ではそれらの座標値が天体に固有なものではなく、同じ天体でも方位角と高度角は観測地ごとに異なるという意味で、使用にあたっての不便さがあるといえる<sup>5</sup>。

## 2.4 日影曲線

すでに述べたように、一日のうちでも朝方と真昼では棒の影の方向とその長さは異なっている。時間を追ってその変化の様子を見てみることは興味深い。ここでは時間の経過に従って影の先端がどのような動きをするかに注目したい。具体的には日の出から日没までの間に、影の先端が描く曲線（これを日影曲線と呼ぶことにする）を調べる問題を考えてみよう。

影の方向と長さは季節によっても変化することから、季節が変われば日影曲線の形も異なることが予想される。ここではまず、ある決められた日に影の先端が描く日影曲線を調べ、次に得られた曲線が季節によってどのように変化するかを考察することにしよう。

地上における影の先端の位置を表示するために、棒の位置を原点として真北に向かう直線を  $x$  軸（の正方向）、真西に向かう直線を  $y$  軸（の正方向）とする平面上の直角座標系を設定し、影の先端の位置をこの座標系の  $(x, y)$  座標値で表すことにする。このとき棒（長さ  $\ell$ ）の影が、真北から時計の針の方向に角度  $a$  の方向を向いていたとすると、影の先端の位置は

$$x = \ell \cot h \cos a, \quad (3)$$

$$y = \ell \cot h \sin a \quad (4)$$

で与えられる。ここで、既に述べたように  $h$  は地平座標での太陽の高度角であり、影の方向を与える  $a$  は地平座標での太陽の方位角を表す。一日の間でも地球の自転により（太陽の日周運動により）、時間が経過するにつれて太陽の高度角  $h$  と方位角  $a$  は変化する。この結果、先端の位置座標  $x$  と  $y$  は時間の経過によって変化することになる。このことから、時間を追って  $x$  と  $y$  の変化を調べることによって、棒の先端が描く日影曲線が得られることがわかる。

<sup>5</sup>天体の位置（天球上の位置）を表すものを、その天体の座標と呼ぶ。地平座標はその一つの例であるが、天体の位置の表し方にはそのほかに、赤経・赤緯座標、赤緯・時角座標、黄道座標などがある。赤経・赤緯座標は観測地に関わりなく天体に固有な座標であり、赤緯・時角座標は地平座標と赤経・赤緯座標の橋渡しとなる座標系といえる。これらの座標系に関する詳しい解説は、ホームページの天体の座標系に関する項を参照のこと。

(3) と (4) の右辺から日周運動による時間依存性を消去すると、 $x$  と  $y$  が次の関係

$$\left(x + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2} \ell\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1) \quad (5)$$

を満たすことがわかる<sup>6</sup>。上式で  $\phi$  は観測地の緯度を表し、 $e$  は緯度  $\phi$  と太陽の赤緯  $\delta$  を用いて<sup>7</sup>

$$e \equiv \frac{\cos \phi}{\sin \delta} \quad (6)$$

で定義され、その絶対値  $|e|$  は (5) で表される 2 次曲線の離心率を与える。また (5) は

$$(1 - e^2)x^2 + 2\ell e^2 \tan \phi x + y^2 + \ell^2(1 - e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (7)$$

と書き直すこともできる。

(5) または (7) で与えられる日影曲線の形は、離心率  $|e|$  の値によって次のように分類できる：

#### 日影曲線の分類 1

1)	$e = 0,$	円,	$x^2 + y^2 = \ell^2$
2)	$0 <  e  < 1,$	楕円,	$\left(x + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2} \ell\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{\ell^2}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1)$
3)	$ e  = 1,$	放物線,	$2\ell \tan \phi x + y^2 + \ell^2(1 - \tan^2 \phi) = 0$
4)	$1 <  e  < \infty,$	双曲線,	$\left(x - \frac{e^2 \tan \phi}{e^2 - 1} \ell\right)^2 - \frac{y^2}{e^2 - 1} = \frac{\ell^2}{(e^2 - 1)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1)$
5)	$ e  = \infty,$	直線,	$x = \ell \tan \phi$

(6) からわかるように、観測地の緯度  $\phi$  が異なれば離心率  $|e|$  は違った値になる。また緯度  $\phi$  が同じでも太陽の赤緯  $\delta$  が異なる場合には、離心率も違う値となる。太陽の赤緯は季節によって変化するから、同じ観測地でも季節によって離心率  $|e|$  が異なり、その結果日影曲線の形も季節によって変わることがわかる。

観測地の緯度の違い、また観測時の季節の移り変わりによる日影曲線の形の変化の様子は、以下のようにまとめることができる。

#### 2.4.1 北極または南極では ( $e = 0$ のとき)

夏季期間中の北極 ( $\phi = 90^\circ, \delta > 0^\circ$ )、または冬季期間中の南極 ( $\phi = -90^\circ, \delta < 0^\circ$ ) では、離心率  $e = 0$  は共にゼロであるから、そこで観測される日影曲線は半径  $\ell$  の円となる。

#### 2.4.2 春分または秋分のとき ( $e = \infty$ のとき)

春分または秋分のとき、太陽は赤道上空にあるので、太陽の赤緯はゼロ ( $\delta = 0^\circ$ ) となる。このときは観測地に関係なく (極以外の地域では) 離心率は無限大 ( $|e| = \infty$ ) となるので、観測される日影曲線は真西から真東に向かう ( $x = \ell \tan \phi$ ) 直線となる。

<sup>6</sup>この式の導き方は Appendix で与えられている。

<sup>7</sup>赤緯は赤道座標系で表した天体 (今の場合太陽) の座標を意味する。詳細は天体の座標系に関するページを参照。

### 2.4.3 北緯 6 6 度 3 0 分から南緯 6 6 度 3 0 分の範囲では ( $-66.5^\circ \leq \phi \leq 66.5^\circ$ )

太陽の赤緯は季節によって変化するが、その変化の範囲は  $-23.5^\circ \leq \delta \leq +23.5^\circ$  の範囲だから、春分と秋分のときを除けばこの領域での離心率  $|e|$  は常に 1 よりも大きくなる。従って、観測される日影曲線は双曲線となる。この場合の双曲線の形 ( $|e|$  の大きさ) は、同じ観測地 (同じ緯度  $\phi$  のところ) でも季節によって ( $\delta$  が変化すると) 変化し、また同じ季節の同じ日でも観測地の緯度の違いによって異なってくる。

### 2.4.4 高緯度地域 ( $|\phi| > 66.5^\circ$ ) では

北緯  $66.5^\circ$  以北または南緯  $-66.5^\circ$  以南の地域では、季節によらず ( $\delta$  が  $-23.5^\circ \leq \delta \leq +23.5^\circ$  の範囲で変化しても) 離心率の絶対値は 1 以下である。従って、これらの地域で観測される日影曲線は楕円となる。ただし、年に 1 度だけ日影曲線は放物線を描く<sup>8</sup>。

## 3 日影曲線解析の実例

実際の観測データを用いて日影に関する考察を行う。図 1 は、2004 年 8 月 12 日長野県北佐久郡立科町にある慶應義塾大学立科山荘の敷地で観測した一日の日影の動きに関するデータである<sup>9</sup>。

### 3.1 考察 1 : 太陽高度角を求める

観測時刻が 12 時丁度のときの影の先端の位置に注目する。影の先端と棒までの距離の実測値は 2.0 cm であった。棒の長さは 5.0 cm であるから、このときの太陽の高度角を  $h_{12}$  とすると、(1) より

$$\cot h_{12} = \frac{L}{\ell} = \frac{2.0}{5.0} = 0.4 \quad (8)$$

となり、 $h_{12} = 68.2^\circ$  であることがわかる。

### 3.2 考察 2 : 基準方位の決め方

各時刻における太陽の方位角を求めるには、基準となる真北の方向を決定することが必要である。観測データをプロットした図で真北の方向を決めるには、2 通りの決め方が考えられる。第一の方法はインディアン・サークル法と呼ばれる方法<sup>10</sup>であり、第 2 の方法

<sup>8</sup>観測地の緯度  $\phi$  と太陽の赤緯  $\delta$  が  $\phi + \delta = 90^\circ$  または  $180^\circ$  の関係を満たすとき、日影曲線は放物線となる ( $|e| = 1$ )。  $|e| = 1$  となるのは年に 2 回 (夏季と冬季) 実現するが、冬季に  $|e| = 1$  となるときには北緯  $66.5^\circ$  以上の高緯度地域では太陽が地平線の下にあり日影はできない。結果として放物線は年に 1 度だけ観測されることになる。南半球でも状況は同じである。

<sup>9</sup>観測者は、田中・早野 (9 時 - 10 時)、松土・渡辺 (10 時 - 11 時)、下井・石川 (11 時 - 12 時)、児玉・小林 (12 時 - 13 時)、岩田・児玉 (13 時 - 14 時)、西田・坂巻 (14 時 - 16 時) である。この観測に用いた装置を装置 1 と呼ぶことにする。装置 1 は小林宏美氏によって製作されたものである。

<sup>10</sup>インディアン・サークル法では、棒の位置を中心とする適当な半径の円を描き、この円が日影曲線と交わる 2 点を結ぶ直線を引く。この直線は東西の方向を表すことから、棒の位置を通り東西を結ぶ線分に垂直に引いた半直線の向きを真北とする決め方である。

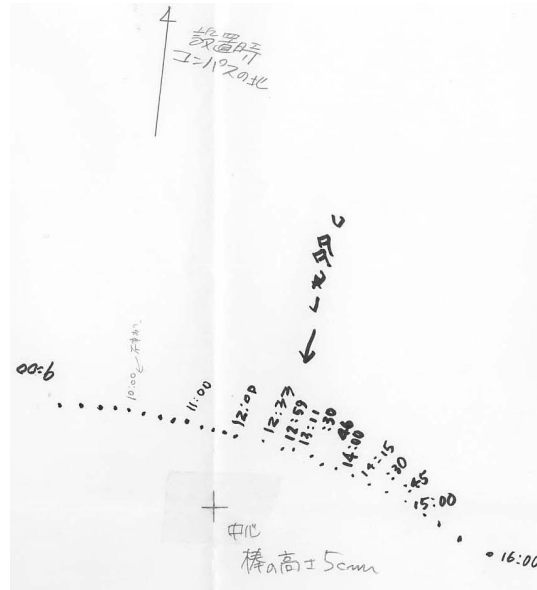


図 1: 日影曲線 1

は太陽が南中したとき（12時）の影の方向を真北にとる決め方である。

二つの方法で決めた北の方向は必ずしも一致しない。その原因として考えられるものは、インディアン・サークル法では、観測データが15分毎のものであるためその間の影の先端の位置を目分量で決めざるを得ないことからくる誤差が避けられないこと、一方南中時の影の方向から決める場合には観測地の経度が東経135°（日本標準時の経度）に等しくないために、12時が正確な南中時刻とは一致しないことによる誤差が生じることである。ここではこの問題はひとまず抜きにして、12時のときの影の向きを真北の方向ととることにする。

### 3.3 考察3：影の先端の座標値を測定する

2.4節で述べたように、北に向かう方向を  $x$  軸の正の方向とし、西に向かう方向を  $y$  軸の正の方向とする2次元の直角座標系をとり、その座標系における影の先端の座標値  $(x_i, y_i)$  を求める。ここで添え字  $i$  は各観測時刻の順を表すものであり、9時を  $i = 1$  番目として、16時を  $i = 27$  番目とする。求められた各時刻ごとの座標値を次の表に与える<sup>11</sup>。

<sup>11</sup> 図1から座標値を求める場合は、図中の12時における影の先端と棒の間隔を測り、それを2cmとなるように図の縮尺の割合を決めればよい。その縮尺の割合を用いて、図中の各時刻の座標値から実際の座標値を求めることができる。

表 1 : 座標値 ( 観測データ ) ( $\ell = 5\text{cm}$ )

$i$	$x_i(\text{cm})$	$y_i(\text{cm})$	$X_i(= x_i/\ell)$	$Y_i(= y_i/\ell)$
1	1.47	4.71	0.294	0.941
2	1.61	4.18	0.321	0.835
3	1.71	3.65	0.341	0.729
4	1.79	3.26	0.359	0.653
5	1.86	2.91	0.372	0.582
6	1.88	2.53	0.376	0.506
7	1.91	2.06	0.382	0.412
8	1.93	1.71	0.386	0.341
9	2.00	1.35	0.400	0.271
10	1.96	0.91	0.392	0.182
11	2.00	0.59	0.400	0.118
12	2.01	0.29	0.402	0.059
13	2.00	0.00	0.400	0.000
14	2.06	-0.74	0.412	-0.147
15	2.03	-1.31	0.406	-0.262
16	2.06	-1.56	0.412	-0.318
17	2.06	-2.12	0.412	-0.424
18	1.91	-2.44	0.382	-0.488
19	1.94	-2.82	0.388	-0.565
20	1.88	-3.32	0.376	-0.665
21	1.76	-3.82	0.352	-0.765
22	1.71	-4.32	0.341	-0.865
23	1.47	-4.88	0.294	-0.976
24	1.41	-5.47	0.282	-1.094
25	1.29	-5.94	0.259	-1.188
26	1.06	-6.56	0.212	-1.312
27	0.88	-7.44	0.177	-1.488

### 3.4 考察 4 : 離心率と太陽赤緯を求める

日影曲線は (7) で表されることを考慮して、表 1 に記された観測データを最も再現する曲線の形を求めることを考える。(7) は各項が長さの次元を持っているので、ここで改めて次元を持たない変数  $X$  と  $Y$  を

$$X \equiv \frac{x}{\ell}, \quad Y \equiv \frac{y}{\ell} \quad (9)$$

で定義すると、日影曲線の式 (7) は無次元の変数  $X, Y$  を用いて

$$(1 - e^2)X^2 + 2e^2 \tan \phi X + Y^2 + (1 - e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (10)$$

と書き直すことができる。この式には棒の長さ  $\ell$  は顔を出していないことに気がつくであろう。この意味で (10) は棒の長さに関係なく、日影曲線の特質を表すものである。

(10) には、観測地の緯度  $\phi$  および  $\phi$  と太陽の赤緯  $\delta$  から決まる離心率  $|e|$  の 2 乗が含まれているが、ここでは観測地（立科山荘）の緯度は既知のものとして（ $\tan \phi = 0.734$ ）、観測データを再現するに最適な  $e^2$  を最小 2 乗法を用いて求める<sup>12</sup>。

各時刻ごとの  $X_i, Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 27$ ) は表 1 に与えられているので、これらのデータから得られる最適曲線は、 $e^2$  が次式

$$e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{27} \{(X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)(X_i^2 + Y_i^2 + 1)\}}{\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2} = 10.89 \quad (11)$$

で与えられる値を持つときである。

従って観測データから求められた離心率  $e$  は

$$e(\text{測定値}) = 3.30 \quad (12)$$

となる<sup>13</sup>。この結果、立科山荘における 8 月 12 日の観測データから得られる日影曲線は、離心率  $e = 3.30$  の双曲線であることが明らかになった。これは前節の理論的な予測（この地での日影曲線は双曲線で与えられる）を正当化するものである。

離心率の定義 (6) とその測定値 (12) および立科山荘の緯度から、2004 年 8 月 12 日の太陽の赤緯  $\delta$  (測定値) を求めると

$$\delta(\text{測定値}) = +14^\circ 09' \quad (13)$$

となる。

これを天文年鑑 (2004 年版) に記載されている同じ日の太陽赤緯  $\delta$  (天文年鑑)

$$\delta(\text{天文年鑑}) = +14^\circ 56' \quad (14)$$

と比較してみると、かなり近い値が得られたことがわかる。測定値のずれの原因としては、(1) 観測データのバラつきが大きいこと、(2) 真北の方向の決め方に不確定要素が含まれていること等、が考えられる。

## 4 カリキュラム案

本節では日影の科学のためのカリキュラムを用意する。第 3 節で考察した日影の観測データが得られた同じ日の同じ場所（2004 年 8 月 12 日の慶應義塾大学立科山荘）で、もう一つ別の装置（これを装置 2 と呼ぶ<sup>14</sup>）を用いて前節の観測とは独立に日影の観測がなされた。図 2 はその観測データである。まずこの別の観測データを用いて、日影の科学のためのカリキュラムを用意する。

<sup>12</sup>最小 2 乗法の説明は Appendix に与えられているので、そちらを参照のこと。

<sup>13</sup>離心率として正の値を選んだのは観測日時が 8 月 12 日であり、この日が春分と秋分の間にある ( $\delta > 0$ ) ことを考慮した。

<sup>14</sup>装置 2 は中村康二氏が製作したものである。





図 2: 日影曲線 2

#### 4.1 課題 1 : 装置 2 の棒の長さを求める

前節と同じ考察をするためには、各時刻における実際の影の長さや影の原因となる棒の長さが測定されることが必要である。しかし装置 2 では棒の長さを測定し忘れたことが明らかになった。幸いなことに装置 1 と装置 2 の観測日時と観測場所は同じであることから、装置 1 のデータを用いて装置 2 の棒の高さ  $l$  を求めることが可能となる。

装置 1 のデータから、立科山荘において 2004 年 8 月 12 日 12 時の太陽の高度角は  $68.2^\circ$  であることが求められた。一方、装置 2 における同じ日の同じ時刻 (8 月 12 日 12 時) の影の長さを測定すると  $L = 3.8\text{cm}$  であった。これらのデータから測定装置 2 の棒の長さを求めよ<sup>15</sup>。

#### 4.2 課題 2 : 方位を決める

各時刻における太陽の方位を求めたり、また各時刻における影の  $x$  座標と  $y$  座標を測定するには、図 2 のデータから真北の方向を決めることが必要となる。インディアン・サークル法を用いて北の方向を決めてみよう。この方法で決めた北の方向と、12 時の影の方向に違いが生じるか調べてみよう。また、立科山荘 (経度  $138.3^\circ$ ) における太陽の南中時刻を求め、そのときの影の方向を真北の方向と定め、インディアン・サークル法によって決めた北の方向との差を調べてみよう。

<sup>15</sup> 同じ方法で、影の長さや太陽の高度角から、影の原因となる建物や木の高さを測定することができる。この点に関しては、日影の科学 2 でさらに考察することになる。

#### 4.3 課題3：各座標値をプロットする

図?上に、課題2で決めた北の方角を  $x$  軸の正の向きとし、西方向を  $y$  軸の正の向きとする直角座標をとり、各時刻における影の先端の座標値  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 27$ , を求めてみよう。次に求めた座標値を棒の高さ  $l$  で割った値  $(X_i, Y_i)$  を求め、これらの値をグラフ用紙にプロットして曲線の概形を描いてみよう。

#### 4.4 課題4：最適曲線の離心率を求める

(11)と同じ方法を用いて、課題4で求めた  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 27$ , から、装置2による観測データの最適曲線を求め、その離心率  $e$  を測定する。得られた結果を用いて8月12日の太陽の赤緯  $\delta$  を求めてみよう。求められた結果を天文年鑑のデータ ( $\delta = +14^\circ 56'$ ) と比較して、その差の原因を考察しよう。

#### 4.5 課題5：実際に自分で観測しよう

ある日の影の動きを実際に自分で測定し、その観測データを用いて、その日の日影曲線の離心率と太陽の赤緯を求め、天文年鑑に記載された赤緯の値と比較してみよう。北の方角の決め方の違いによって、求められた日影曲線の離心率と太陽の赤緯にどのような差が生じるかを調べてみよう。

#### 4.6 課題6：日影曲線の季節変化を調べる

毎月決められた日に日影曲線を測定し、季節によってその離心率と太陽の赤緯が変化する様子を調べてみよう。

#### 4.7 課題7：日影曲線の緯度依存性を調べる

緯度の異なる観測地の人と協力して、決められた日の日影曲線を測定し、緯度の違いによる離心率の変化を調べよう。またこのとき求められた太陽の赤緯は、観測地の緯度の違いによって変化するか否かを確かめよ。

### 5 付録1：日影曲線の求め方

日影曲線の方程式が(5)で表されることを示す。まず、太陽の位置の地平座標と赤緯を

方位角：  $a$

高度角：  $h$

太陽の赤緯：  $\delta$

と表す。また観測地点の緯度を  $\phi$  とする。

このとき垂直に立てられた棒の影（太陽光線による）について考察する。棒の高さを  $\ell$  としたとき、棒の先端の  $(x, y)$  座標は

$$\begin{aligned}x &= \ell \cot z \cos a \\y &= \ell \cot z \sin a\end{aligned}\tag{15}$$

で与えられる。ここで  $x$  軸の正方向は北向き、 $y$  軸の正方向は西向き、とする。地平座標の天頂距離  $z$  と方位角  $a$  は共に時間の関数であるから、上記座標を赤緯・時角座標  $(\delta, H)$  に変換することによって、時間に依存する座標変数が  $H$  だけになるよう（ $\delta$  は一日のうちでは時間に依存しないと考える）に座標を取り直す。地平座標  $(h, a)$  と赤緯・時角座標  $(\delta, H)$  の変換は

$$\begin{aligned}\cos h \sin a &= \cos \delta \sin H, \\ \cos h \cos a &= -\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H, \\ \sin h &= \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H\end{aligned}\tag{16}$$

で与えられる。  
したがって、

$$\begin{aligned}\cot h \sin a &= \frac{\cos \delta \sin H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}, \\ \cot h \cos a &= \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}\end{aligned}\tag{17}$$

から、

$$X \equiv \frac{x}{\ell} = \frac{-\sin \delta \cos \phi + \cos \delta \sin \phi \cos H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H},\tag{18}$$

$$Y \equiv \frac{y}{\ell} = \frac{\cos \delta \sin H}{\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H}\tag{19}$$

となる。これは太陽の位置を赤緯・時角座標で表したときの、影（単位長さの棒の）の先端の座標を与える。

すでに述べたように、赤緯・時角座標を用いた  $X$  と  $Y$  の表式で、1日の間で時間とともに変化するのは時角  $H$  だけだから、これを消去することによって、太陽の日周運動によって描かれる影の先端の軌跡が求められる。上式を変形すると

$$\begin{aligned}(\sin \phi - X \cos \phi) \cos \delta \sin H &= Y \sin \delta \\ (\sin \phi - X \cos \phi) \cos \delta \cos H &= X \sin \delta \sin \phi + \sin \delta \cos \phi\end{aligned}\tag{20}$$

となるので、 $\sin H$  と  $\cos H$  を消去すると軌跡の方程式

$$X^2(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi) + 2X \sin \phi \cos \phi + Y^2 \sin^2 \delta + \sin^2 \delta \cos^2 \phi - \cos^2 \delta \sin^2 \phi = 0\tag{21}$$

が得られる。

以下では、 $\sin^2 \delta \neq \cos^2 \phi$  のときと、 $\sin^2 \delta = \cos^2 \phi$  のときに分けて、軌跡の形を考察する。

## 5.1 $\sin^2 \delta \neq \cos^2 \phi$ のとき

軌跡の式は

$$\left(X + \frac{\sin \phi \cos \phi}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)}\right)^2 + \frac{\sin^2 \delta}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)} Y^2 = \frac{\sin^2 \delta \cos^2 \delta}{(\sin^2 \delta - \cos^2 \phi)^2} \quad (22)$$

となる。

### 5.1.1 $\sin \delta = 0$ のとき

上式は

$$X = \tan \phi = \text{const.} \quad (23)$$

となる。また (19) から

$$Y = \frac{\tan H}{\cos \phi} \quad (24)$$

となり、 $Y$  は時間が経つにつれて変化する ( $X$  の式は (18) から求められる)。したがって、この場合、影の軌跡は ( $X = \tan \phi$ ) 直線となる。ところで  $\sin \delta = 0$  すなわち  $\delta = 0$  は太陽の赤緯がゼロのときであり、太陽が地球の赤道上の真上にあるとき (春分と秋分のとき) である。黄道座標を用いたとき太陽の黄経を  $\lambda$  とすると (太陽の黄緯はゼロだから)

$$\sin \delta = \sin \lambda \sin \epsilon \quad (25)$$

が成り立つから ( $\epsilon$  は黄道の傾斜角)  $\sin \delta = 0$  のとき  $\sin \lambda = 0$  すなわち  $\lambda = 0, \pi$  となる。このとき太陽は横道上の春分点または秋分点上にあることが分かる。

### 5.1.2 $\sin \delta \neq 0$ のとき (太陽が赤道上空にないとき)

軌跡の式は

$$\left(X + \frac{e^2 \tan \phi}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{Y^2}{(1 - e^2)} = \frac{\cot^2 \delta}{(1 - e^2)^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^2} (e^2 \sec^2 \phi - 1) \quad (26)$$

となる。ここで  $e$  は

$$e \equiv \frac{\cos \phi}{\sin \delta} \quad (27)$$

で定義され、その絶対値  $|e|$  は上で表される 2 次式の離心率を表す。

## 5.2 $\sin^2 \delta = \cos^2 \phi$ のとき

軌跡の式は

$$Y^2 + 2X \tan \phi + (1 - \tan^2 \phi) = 0 \quad (28)$$

となり、放物線となることがわかる。

## 6 付録 2 : 最適曲線の求め方 (最小 2 乗法)

影の先端の観測データを再現する最適曲線は以下のようにして求めることができる。日影曲線は (10) で与えられるので、各時刻の観測データ  $(X_i, Y_i)$  が曲線上にあれば、

$$(1 - e^2)X_i^2 + 2e^2X_i \tan \phi + Y_i^2 + (1 - e^2 \tan^2 \phi) = 0 \quad (29)$$

が成り立つ。実際の観測データ  $(X_i, Y_i)$  は必ずしも (29) を満たすとは限らないので、

$$\begin{aligned} \xi_i &\equiv (1 - e^2)X_i^2 + 2e^2X_i \tan \phi + Y_i^2 + (1 - e^2 \tan^2 \phi) \\ &= X_i^2 + Y_i^2 + 1 - e^2(X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi), \quad i = 1, 2, \dots, 27 \end{aligned} \quad (30)$$

と置いたとき、 $\xi_i$  は求めるべき日影曲線上の対応する点と観測データとのずれを表している。

(30) 中の緯度  $\phi$  は既知とすると、 $\xi_i$  は  $e^2$  の関数となる。この場合、最小 2 乗法は各時刻のずれの 2 乗の和  $S(e^2)$

$$S(e^2) \equiv \sum_{i=1}^{27} \xi_i^2 \quad (31)$$

を  $e^2$  の関数とみて、それが最小となるように変数  $e^2$  を選ぶ方法である。上式に (30) で定義した  $\xi_i$  を代入すると、

$$\begin{aligned} S(e^2) &= \left[ \sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2 \right] (e^2)^2 \\ &\quad - 2 \left[ \sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)(X_i^2 + Y_i^2 + 1) \right] e^2 + \sum_{i=1}^{27} (X_i^2 + Y_i^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

となり、これは  $e^2$  に関する 2 次式である。このとき  $(e^2)^2$  の係数は正であるから、 $e^2$  として

$$e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)(X_i^2 + Y_i^2 + 1)}{\sum_{i=1}^{27} (X_i^2 - 2X_i \tan \phi + \tan^2 \phi)^2} \quad (33)$$

と選べば  $S(e^2)$  は最小となる。よって、求める最適曲線の離心率 (の 2 乗)  $e^2$  は (33) で与えられることが示された。