

日影の科学 2

平成 16 年 10 月 4 日

1 序

「日影の科学 1」は、太陽からの光がつくる地上の影について考察した。「日影の科学 2」では、地球を離れて月面に目を向けることにしたい。月面を眺めると様々な模様が観測されることは良く知られている。特に満月のときに見た月の表面には、薄暗い模様が見えるが、これを日本では昔から「ウサギが餅をついている姿」に見立ててきた。一方、中国ではこの模様は、不老不死の薬を盗んで月に逃げたジヨウ蛾（じょうが）が変身した「ガマガエルの姿」であるとされてきた。また、ヨーロッパでは、「女の人の顔」とか「カニ」の形になぞらえている。

うさぎが餅をついているように見える薄暗いところは「海」と呼ばれ、それに比べて明るいところは「陸」と呼ばれている。望遠鏡でこの「陸」の部分を見ると、デコボコした様々な地形が観測されるが¹。この地形の一つにクレーターがある。以下ではこのクレーターに出来る影について考察することにしよう。

2 クレーターの高さ

長いあいだ月の山脈やクレーターは、切り立つ山のように非常に高いものと考えられてきました。月面に出来る影を観測することによって、月の地形が本当にそのように険しいものか否かを調べてみよう。

2.1 月面の影の長さ

「日影の科学 1」で、影の長さから建物や木の高さを測ることが出来ることを示した。その関係をもう一度復習してみよう。影の原因となる建物や木の高さを ℓ 、それらによってつくられた影の長さを L 、そのときの太陽の高度角を h としたとき、これらの間には次の関係

$$L = \ell \cot h \quad (1)$$

が成り立つ。従って、太陽の高度角 h が分かっているとき、建物などの高さ ℓ はその影の長さ L から

$$\ell = \frac{L}{\cot h} = L \tan h \quad (2)$$

¹月面の様々な地形に関しては別に記述する。

で与えられた。

関係式 (1) または (2) は、月面上の影についても同じように成り立つ。この場合、 ℓ は月面上の山やクレーターの壁の高さ ℓ_{\odot} に、 L はそれらによってできた月面上の影の長さ L_{\odot} に、また h は影が出来ている月面の位置でのそのときの太陽の高度角 h_{\odot} に置き換えて考える。従って、月面上の影の長さとその地点におけるそのときの太陽高度がわかれば、影をつくる月面の山の高さやクレーターの壁の高さを求めることが出来ることになる。

地上での観測の場合、「日影の科学 1」で示したように、観測地点での観測時の太陽の高度角 h は、高さ ℓ が知られている棒の影の長さ L から求めることができた ($\cot h = L/\ell$)。また建物等の影の長さも直接測ることが出来る。従って、直接測定した影の長さ L と太陽の高度角 h から、建物等の高さ ℓ を計算することができた。一方、地上に居たままで月面の影の長さを直接測ることは不可能である。同じような理由で、影の出来た月面でのそのときの太陽高度を直接測定することも不可能である。それでは、月面の山やクレータの高さを測定するために必要となる、月面の影の長さとは太陽高度はどのようにして求めることが出来るのであろうか。以下ではこれらの量の測定法を考えてみよう。

まず影の長さの測定を考える。望遠鏡で月面の画像をとると、その画像上にはいろいろな地形とそれらの影が写っているのが確かめられるであろう。画像上のこれらの影の長さから、月面に出来ている影の実際の長さを求めることを考える。画面上の影の長さから月面上でのその影の実際の長さを求めるには、画面の縮尺を知ることが必要となる。画面上には影のほかに様々な地形が写っているが、その地形のうちのどれか一つの月面上における実際のサイズがわかっているならば、画面上のその地形のサイズと比較して画面の縮尺を知ることが可能となる。

ここでは、「日影の科学 2」のために用意した月面図²を用いて、画像の縮尺を調べることしよう。この月面図には縮尺が与えてあるので、その図面上の地形のサイズから、それらの実際の大きさが求められる。そこで調べたい画像上の一つの地形（例えばクレーター）に注目して、その地形がデータベース記載の月面図のどの地形に対応するかを特定する。特定された地形の実際の大きさは、上に述べた手続きで既に求められているから、その大きさと問題の画像上の同じ地形のサイズの比から、その画像の縮尺を求めることが可能となる。このようにして求められた画像の縮尺を使って、同じ画像に写っているいろいろな影の長さの月面上における実際の長さが計算できることになる。

2.2 月面で見える太陽の高度角

地球上での太陽高度角 h は、「日影の科学 1」の (2) 式で与えたように

$$\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H \quad (3)$$

から求められた。ここで ϕ は観測地点の緯度を表し、 δ は観測した日の太陽の赤緯である。また、 H は太陽の時角であり、観測地点の経度と太陽の赤径から決まる量である。太陽の赤径・赤緯は、地上で南中時の太陽が真上にくる点の経度と緯度であるから、この点に注目することによって月面上の太陽高度を表す式をあたえることができる。

²データベースのページ参照（現在準備中）。この月面図は の望遠鏡で本課題用に撮影したものである。

月面の山やクレーターの壁の高さを、その影の長さから測定するには、影ができた月面上の位置における観測時の太陽高度を求めることが必要となる。求めるべき月面上の太陽高度角を h_{\ominus} とする。月面上で影が出来る点（観測地点にあたる）の月面上における経度と緯度をそれぞれ $(\eta_{\ominus}, \theta_{\ominus})$ とし、そのとき太陽が真上にある点（月面上）の月面経・緯度をそれぞれ $(l_{\ominus}, b_{\ominus})$ としたとき、地上の関係式 (3) に対応する月面上の式は

$$\sin h_{\ominus} = \sin b_{\ominus} \sin \theta_{\ominus} + \cos b_{\ominus} \cos \theta_{\ominus} \cos(l_{\ominus} - \eta_{\ominus}) \quad (4)$$

となる。 l_{\ominus} のかわりに $c_{\ominus} \equiv 90^{\circ} - l_{\ominus}$ を導入すると、(4) は

$$\sin h_{\ominus} = \sin b_{\ominus} \sin \theta_{\ominus} + \cos b_{\ominus} \cos \theta_{\ominus} \sin(c_{\ominus} + \eta_{\ominus}) \quad (5)$$

と書き直すことができる。ここで c_{\ominus} は太陽の月面余経度と呼ばれる。

月面上の影の位置の月面経・緯度と、その時刻に太陽が真上にくる位置の月面余経度と月面緯度 $(c_{\ominus}, b_{\ominus})$ が分かれば、(5) から影を観測した時刻における月面上のその点での太陽の高度角 h_{\ominus} を求められる。その角度と 2.1 節の方法で求めた月面の影の長さ L_{\ominus} から、影の原因となる月面の山やクレーターの壁の高さ l_{\ominus} は

$$l_{\ominus} = L_{\ominus} \tan h_{\ominus} \quad (6)$$

で与えられる。

ところで、望遠鏡で撮影した画像上の影の月面経・緯度 $(\eta_{\ominus}, \theta_{\ominus})$ は、画像の地形を月面図の地形と照らし合わせ、画像上の地形が月面図のどの地形に対応するかを特定することによって、特定された地形の経・緯度を資料の月面図から読み取ることによって求めることができる。残された問題は、影が撮影された日時に太陽が真上にくる位置の月面余経度と月面緯度 $(c_{\ominus}, b_{\ominus})$ を求めることである。

2.3 月面余経度 c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} の求め方

影が撮影されたときの月面余経度 c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} は、その日時における太陽の位置と地球の位置および月の位置関係、さらに月の自転軸の傾き等から決められる。太陽を基準にしたときの地球の位置は、第一義的には太陽と地球間の重力作用によって決まるものであるが、そのほかに月を含む他の天体（金星・火星等）と地球間の重力もその位置決定に影響を及ぼす。さらには相対性理論の効果も考慮する必要がある³。これらの効果を考慮して太陽と地球および月の位置関係を、時間を追って調べることは天体力学の重要な課題であるが、それらの考察は付録に譲ることにする。ここでは天文年鑑に記載されている各日時における太陽直下点の月面余経度 c_{\ominus} と緯度 b_{\ominus} に関するデータを用いることにする。このデータは日本標準時における 9:00 時の理論値であるから、目的の日時における c_{\ominus} と緯度 b_{\ominus} を求めるには、該当日のデータに観測時までの時刻のズレ（9 時と観測時の時刻の差）を考慮することが必要となる。具体的な求め方は次の節で与える。

上で求めた太陽直下点の月面余経度 c_{\ominus} と緯度 b_{\ominus} 、および影の位置の月面経緯度 $(\theta_{\ominus}, \eta_{\ominus})$ を (5) に代入すると、求めるべき太陽の高度角 h_{\ominus} が計算でき、それと影の長さ L_{\ominus} から

³地球の位置決定に及ぼす他の天体の影響と相対性理論の効果等の扱いに関しては付録を参照。

最終的に月面のクレーター等の高さが得られることになる。ところで、黄道面（地球を中心とした座標系で太陽が動く平面：太陽は常にこの平面上にある）に対する月の自転軸の傾きは小さい（ 1.8° ）ので、日時に関わりなく b_\ominus も常に小さい値となる（天文年鑑参照）。この点を考慮すると、(5) は

$$\sin h_\ominus = 3.14 \times \left(\frac{b_\ominus}{180}\right) \sin \theta + \cos \theta \sin(c_\ominus + \eta) \quad (7)$$

と近似することが出来る⁴。ここで b_\ominus は度単位で表した角度の大きさを意味する。月面上の影の長さからクレーター等の高さを測る問題では、近似式 (7) を用いこともできる。

3 月の影解析の実例

望遠鏡で撮影した月面画像を用いて、月面上の影の長さからクレーターの壁の高さを求めてみよう。画像 1 は、東京府中市（五藤光学社屋上）に設置したインターネット望遠鏡を用いて、2004 年 4 月 29 日 20 時に撮影した月面（一部）の画像である。



画像 1：月面写真 1

⁴角度 b_\ominus が小さいとき、すなわち $3.14 \times (\frac{b_\ominus}{180})$ が 1 に比べて非常に小さいとき、 $\sin b_\ominus \sim 3.14 \times (\frac{b_\ominus}{180})$, $\cos b_\ominus \sim 1$ と近似できることを使った。

3.1 考察1：画像上の地形を特定する

参考資料として用意した月面の地形図と照らし合わせて見ることによって、画像上のクレーターはロンゴモンタヌスと呼ばれるものであることが特定できる。地形図のこのクレーターの大きさとその縮尺から、ロンゴモンタヌスの実際の直径 d_{\ominus} は

$$d_{\ominus} = 145\text{km} \quad (8)$$

であること、および地形図の経緯度から、このクレーターの月面上での経度 η_{\ominus} と緯度 θ_{\ominus} が

$$\eta_{\ominus} = 341.7^{\circ}, \quad \theta_{\ominus} = -50.0^{\circ} \quad (9)$$

であることがわかる。

3.2 考察2：観測日時の太陽直下点の月面余経度 c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} を求める

次に観測日時（2004年4月29日20時）の太陽直下点の月面余経度 c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} を求める。天文年鑑の掲載資料によれば、2004年4月29日9時における太陽直下点の c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} は

$$c_{\ominus} = 21.58^{\circ}, \quad b_{\ominus} = -0.10^{\circ} \quad (10)$$

であり、4月30日9時におけるこれらの値は

$$c_{\ominus} = 33.77^{\circ}, \quad b_{\ominus} = -0.07^{\circ} \quad (11)$$

である。

4月29日9時から4月30日9時までの24時間における余経度の増加分 (12.19°) を時間で均等割して、単位時間当たりの増加分 (0.508°) を求め、その1.1倍 (20時-9時) を29日の値に加えることによって、求める余経度 (4月29日20時の) は

$$c_{\ominus} = 27.17^{\circ} \quad (12)$$

であることがわかる。同様にして、同じ時刻の b_{\ominus} は

$$b_{\ominus} = -0.09^{\circ} \quad (13)$$

となる。

3.3 考察3：太陽高度角 h_{\ominus} を求める

(9) と (12) および (13) を、太陽高度角を求める式 (5) または (7) に代入すると、 $\sin h_{\ominus} = 0.101$ となり、ロンゴモンタヌスでのこのときの太陽高度角 h_{\ominus} と $\tan h_{\ominus}$ は

$$h_{\ominus} = 5.80^{\circ} \quad \rightarrow \quad \tan h_{\ominus} = 0.102 \quad (14)$$

となる。

3.4 考察4：影の実際の長さを求める

画像上の影の長さを測定すると 0.60cm であった。月面におけるこの影の実際の長さを求めるには、画像1の縮尺を知る必要がある。(8)よりロンゴモンタヌスの実際の直径は 145km であること、また画像上のこのクレーターの直径を測定すると 3.90cm であることから、画像の縮尺の値は 2.69×10^{-7} であることがわかる。従って、画像上で 0.60cm の影の月面上での実際の長さ L_{\ominus} は

$$L_{\ominus} = 22.3\text{km} \quad (15)$$

となる。

3.5 考察5：クレーターの壁の高さを求める

ロンゴモンタヌスの影の長さ(15)と、このときの太陽高度(14)から、このクレーターの壁の高さ l_{\ominus} を求めると

$$l_{\ominus} = L_{\ominus} \tan h_{\ominus} = 2.28\text{km} \quad (16)$$

となる。すなわち、望遠鏡で撮影した画像上の影の長さから、クレーター(ロンゴモンタヌス)の壁の高さは約 2300m であることが明らかになった。

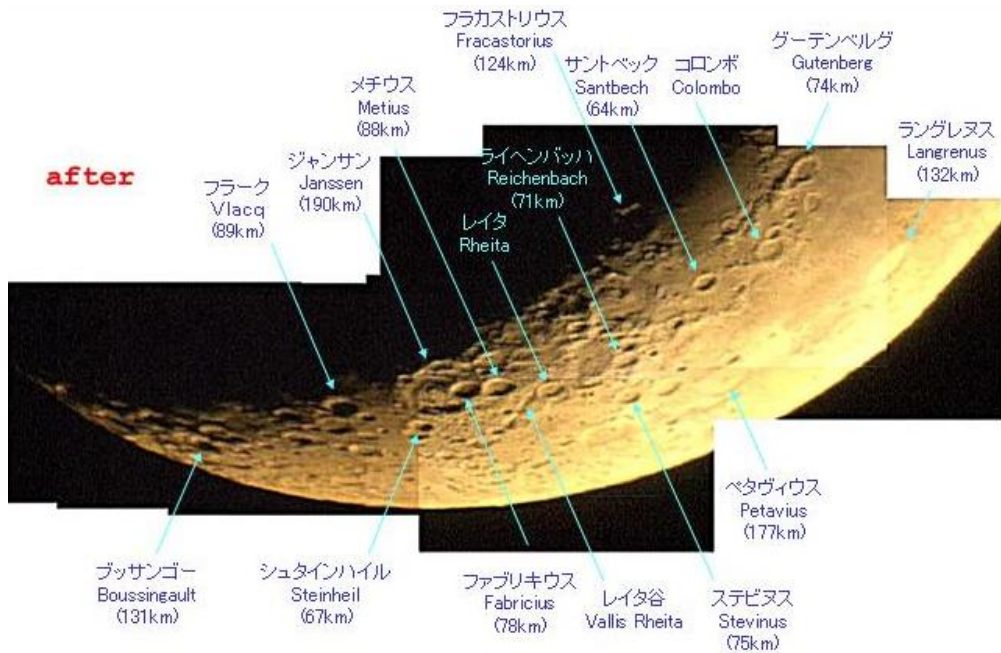
3.6 補注

クレーターの壁の高さを求めるためのこれまでの一連の手続きでは、途中で三角関数の数値計算を行うことになる。この計算には関数電卓または三角関数の数値表が必要になるが、それらを持っていない人のために、必要な観測データを入力することによって上記の計算を全て済ませてくれるプログラムファイルを用意する⁵。このプログラムを使用すれば、太陽と月の位置計算、それを用いて観測日時の太陽直下点の月面余経度と緯度の計算、および観測地点での太陽高度の計算等、必要な計算が全て終了し求める壁の高さが得られる。従って、三角関数の数値計算の準備がない人、またはいろいろなクレーターの高さの測定のために繰り返しこの種の計算を行うことになる人には、この計算プログラムの使用を薦めたい。ただし、このプログラムの背後にある考え方は上記の手計算と同じであることを記憶に留めておきたいものである。

4 カリキュラム案

第3節と同じ方法で月面の地形の高さを求めるカリキュラムを用意する。まずここで用意した画像2上のクレーターの高さを求める課題を考える。次に自分でとった画像上のクレーターの高さを求めることを試してみよう。

⁵現在準備中



画像 2 : 月面写真 2

4.1 課題 1 : 画像に写っているクレータの経緯度を求める

画像 2 は東京府中 (五藤光学社屋屋上) に設置したインターネット望遠鏡を用いて、2004 年 6 月 2 日 20 時に撮影した 9 枚の画像を合成して得た三日月の半分である。画像 2 上のクレータにはそれぞれの名前とその直径が示されている。資料として用意した月面の画像と照らし合わせて、画像上のいろいろなクレータの月面経緯度 ($\eta_{\ominus}, \theta_{\ominus}$) を求めよ。

4.2 課題 2 : 画像撮影日時における太陽直下点の月面余経度と緯度を求める

天文年鑑によれば 2004 年 6 月 2 日 9 時における太陽直下点の月面余経度と月面緯度は $(321.17^{\circ}, 1.20^{\circ})$ であり、6 月 23 日 9 時のそれらの値は $(333.41^{\circ}, 1.22^{\circ})$ であった。これらのデータから、6 月 2 日 20 時における太陽直下点の月面余経度 c_{\ominus} と月面緯度 b_{\ominus} を求めよ。

4.3 課題 3 : クレータの位置での太陽高度角 h_{\ominus} を求める

上で求めた 6 月 2 日 20 時における太陽直下点の余経度・緯度と各クレータの月面経緯度から、各クレータの位置でのこの日時における太陽の高度角 h_{\ominus} と $\tan h_{\ominus}$ を求めよ。

4.4 課題4：画像の縮尺を求める

画像2上の一つのクレーターの大きさを測定し、月面上のその実際の大きさと比較することによって画像の縮尺を求めよ。画像2上の他のクレータを選んで、同様な手続きで画像の縮尺を求め、これらの平均値を求めよ。

4.5 課題5：クレーターの影の長さを求める

課題4で求めた縮尺(の平均値)と画像2上のクレーターの影の大きさから、これらのクレーターの影の月面上における実際の長さ L_{\odot} を求めよ。

4.6 課題6：クレーターの壁の高さを求める

課題3で求めた各クレーターの位置での太陽高度 h_{\odot} と、課題5で求めた影の長さ L_{\odot} から、それらのクレーターの壁の高さ l_{\odot} を求めよ。

4.7 課題7：自分で撮影した画像上のクレーターを調べよ

自分で月面の各部分の画像を撮影し、撮影した画像上のクレーターについて、課題1から課題6までの手続きを踏んで、そのクレーターの壁の高さを測定しよう。

4.8 課題8：日時を変えて測定しよう

同じクレーターの位置でも、日時が違えばそこでの太陽の高度は異なるから、影の長さも違うことになる。日時を変えて同じクレーターの画像を撮影し、その影の長さからクレーターの壁の高さを測定し、以前に求めた高さの測定値と比較してみよう。この種の測定を繰り返すことによって、より正確な高さの測定値が求められることになる。

5 付録1：太陽と月の軌道

6 付録2：高さの計算プログラム(準備中)